

СИММЕТРИЯ, АСИММЕТРИЯ, ДИССИММЕТРИЯ И ЭНАНТИОМОРФИЗМ ПОЛИЭДРИЧЕСКИХ ФОРМ

Ю.Л. Войтеховский

*Геологический институт КНЦ РАН, г. Апатиты
woyt@geoksc.apatity.ru*

В статье рассмотрены последние результаты по перечислению и описанию точечными группами симметрии комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров. Оно является фоном, на котором разворачивается морфогенез полиэдрических минеральных и биологических индивидов в их онтогенезе и филогенезе во всем разнообразии проявлений: симметрии, асимметрии, диссимметрии, энантиоморфизме.

ВВЕДЕНИЕ

Симметрия, асимметрия, диссимметрия и энантиоморфизм природных форм как результат морфогенеза, компромисс внутренних потенций объекта и ограничений среды – классическая тема исследований в естественных науках. Их рассмотрение на примере полиэдрических форм правомерно и интересно по двум причинам. Во-первых, они чрезвычайно распространены в минеральной природе. Идеальные кристаллы суть выпуклые полиэдры. На том стоят теоретические разделы кристаллографии и минералогии. Но полиэдрические формы встречаются и в биологической природе: скелеты радиолярий, икосаэдрические вирусы, ценобии вольвоксовых зелёных водорослей, пыльца растений и т. д. – вопрос лишь в степени их геометрической идеализации. Во-вторых, именно на полиэдрических формах классическая теория симметрии и ее многие расширения получили наибольшее развитие и наглядную интерпретацию, что важно для их понимания и междисциплинарного использования.

ВЫПУКЛЫЕ ПОЛИЭДРЫ: СИММЕТРИЯ, АСИММЕТРИЯ, ЭНАНТИОМОРФИЗМ

Интуитивно ясно, что для своих полиэдрических созданий природа берет модели из некоторой «базы данных». Но насколько она велика, как различать и перечислять полиэдрические формы, каковы акценты внутри их многообразия? Эта проблема давно интересовала математиков, поначалу – без приложений к природным объектам. Уже на ранней стадии исследования были сформулированы фундаментальные понятия комбинаторного типа и комбинаторной (топологической) симметрии полиэдра. Комбинаторный тип – способ организации полиэдра из данного набора n -угольных граней – определяет полиэдр с точностью до непрерывной деформации. Комбинаторная симметрия – точечная группа симметрии самого симметричного полиэдра данного комбинаторного типа (в данном классе комбинаторной эквивалентности).

Несмотря на кажущуюся ясность категории симметрии, ее не просто определить по сути. Чаще всего под симметрией конечной формы понимают ее составленность из равных частей. Некоторым движением, физически реализуемым (повороты) или не реализуемым (отражения), одна часть формы переводится (или вовсе не переводится) в другую. Группа (понимаемая в точном алгебраическом смысле) движений, переводящих форму в себя, и характеризует ее симметрию. Что касается асимметрии, то сегодня не существует иного способа определить ее иначе, как через отрицание симметрии. Кажется, она фундаментальным образом связана с движением, неустойчивостью состояний и должна быть приспособлена к описанию именно этих функций природных систем. Возможно, именно в биологии будет осознан принцип позитивного (конструктивного, без отрицающей приставки «а») определения асимметрии и классификации таких форм.

Богатая история систематического изучения комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров, охватившая вторую половину XIX и весь XX век, описана в каталогах (Войтеховский, Степенщиков, 2008а, б). Результат может показаться незначительным, ведь на сегодня перечислены «всего лишь» 4- ... 12-эдры и простые (в каждой вершине сходятся ровно три грани) 13- ... 16-эдры. Но обратим внимание на число n -эдров с ростом n от 4 до 12: 1, 2, 7, 34, 257, 2606, 32300, 440564, 6384634; и число простых n -эдров с ростом n от 13 до 16: 49566, 339722, 2406841, 17490241 – оно растет быстрее, чем экспонента. А ведь это лишь начало многообразия. Разбиения классов n -эдров по числу вершин дано в таблице 1.

Какова симметричная статистика изученного многообразия? Все 4-, 5- и 6-эдры комбинаторно симметричны. Среди 7-эдров комбинаторно асимметричны 7 (20.588 %), 8-эдров – 140 (54.475 %), 9-эдров – 2111 (81.005 %), 10-эдров – 30014 (92.923 %), 11-эдров – 430494 (97.714 %), 12-эдров – 6336013 (99.238 %), простых 13-эдров – 47030 (94.884 %), 14-эдров – 331796 (97.667 %),

Таблица 1. Числа комбинаторно различных n-эдров с v вершинами.

$\downarrow n,$ $v \rightarrow$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
4	1													
5		1	1											
6			1	2	2	2								
7				2	8	11	8	5						
8				2	11	42	74	76	38	14				
9					8	74	296	633	768	558	219	50		
10					5	76	633	2635	6134	8822	7916	4442	1404	233
11						38	768	6134	25626	64439	104213	112082	79773	36528
12						14	558	8822	64439	268394	709302	1263032	1556952	1338853

$\downarrow n,$ $v \rightarrow$	16	17	18	19	20	22	24	26	28
10	233								
11	36528	9714	1249						
12	1338853	789749	306470	70454	7595				
13						49566			
14							339722		
15								2406841	
16									17490241

15-эдров – 2382352 (98.983 %), 16-эдров – 17411448 (99.550 %). В многообразии установлены полиэдры 24 кристаллографических (1, 2, m, -1, 3, 222, mm2, 4, 2/m, -4, 32, -6, 3m, 4mm, mmm, -42m, -6m2, -3m, 6mm, 23, 4/mmm, 6/mmm, -43m, m3m) и 20 некристаллографических (5m, 7m, -82m, 8mm, 9m, -10m2, -5m, 10mm, 11m, -12m2, -7m, -14m2, 8/mmm, -18m2, 10/mmm, -22m2, 12/mmm, -26m2, 14/mmm, -3-5m) классов симметрии. Они не найдены в кристаллографических классах -3, 4/m, 422, 6, 6/m, 622, m3, 432, что представляет интересную задачу.

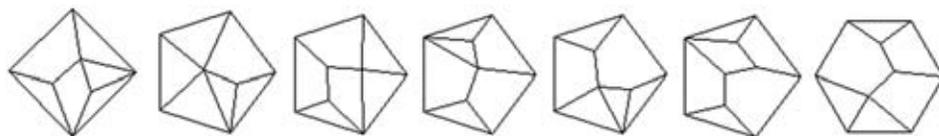


Рис. 1. Простейшие комбинаторно-асимметричные полиэдры в проекции Шлегеля на одну из граней.

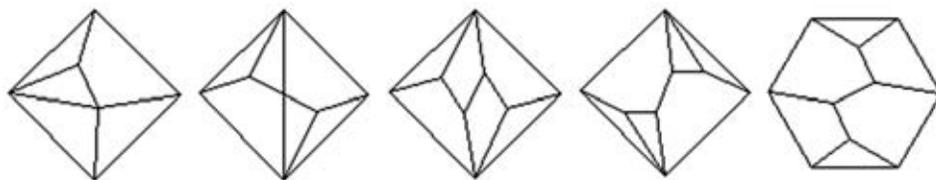


Рис. 2. Простейшие полиэдры с точечной группой симметрии 2.

Главный вывод состоит в том, что с ростом n доля комбинаторно асимметричных n -эдров асимптотически стремится к 100 %. Но она возникает на определённом уровне сложности, а именно с 7-эдров (7 из 34, рис. 1) и далее стремительно нарастает. Среди малой толики симметричных форм преобладают (по убыванию) точечные группы симметрии m , 2 и $mm2$. На их фоне прочие группы симметрии встречаются крайне редко.

Энантиоморфизм допускают не только комбинаторно асимметричные формы. Важно, чтобы в их группе симметрии содержались лишь повороты. Такая форма с группой симметрии 2 впервые появляется среди 6-эдров, среди 7-эдров их 4 (рис. 2), среди 8-эдров – 22, далее их число быстро растёт.

С ростом n постепенно проявляются всё новые энантиоморфные группы: 3 среди 9-эдров, 222 среди 10-эдров, 32 среди 11-эдров (рис. 3) и т. д. По-видимому, выявленные симметричные свойства комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров – в особенности тотальная асимметрия – в целом характеризуют 3D евклидово пространство. Но тогда они должны отражаться в морфогенезе минеральных и биологических форм.

Например, Н.А. Заренков (2009) обсуждает стадии дробления в эмбриогенезе животных, рассматривая клетку, окружённую другими клетками, в комбинаторном приближении как полиэдр. Среди типов дробления им выделяется спиральное. Из сказанного выше следует, что спиральный характер клеточной структуры может быть заложен по формальной геометрической причине не ранее, чем на третьей стадии дробления бластомеров – простейшая энантиоморфная клетка является 6- или 7-эдром, что с учетом окружающих клеток требует 7- или 8-клеточного кластера.



Рис. 3. Простейшие полиэдры с точечными группами симметрии 3, 222 и 32.

ПРОСТРАНСТВА В.И. ВЕРНАДСКОГО, ПРИНЦИП П. КЮРИ И ДИССИММЕТРИЯ

Категорию диссимметрии целесообразно рассматривать в столкновении идей В.И. Вернадского о пространствах земной реальности и принципа П. Кюри. «Натуралист, исходя из школьной рутины, все время мыслил о едином пространстве, но не о разных природных пространствах, не о состояниях пространства. <...> В течение тысячелетий, говоря о природных или естественных телах, он не сознавал и не утверждал (что сейчас приходится делать), что каждое природное тело и каждое природное явление имеет свое собственное материально-энергетическое пространство, которое натуралист изучает, изучая симметрию. Утверждая это, я ввожу в геологию новое определение – пространство земной реальности, то, которое всегда изучает неизбежно натуралист» (Вернадский, 1965, с. 166).

Для описания состояний пространств земной реальности Вернадский нашел в качестве инструмента адекватное по широте эмпирическое обобщение – принцип диссимметрии П. Кюри. «Продолжающиеся до сих пор попытки свести все природные проявления пространства или пространства-времени в их эмпирическом выявлении к одному Эвклидову пространству не привели к точным результатам и не дают ясной картины окружающего. Мне представляется безнадежным и неоправданным научной логикой продолжать эти попытки. Мысль Кюри о диссимметрии как состояниях пространства открывает, мне кажется, нам новые возможности, новые пути понимания окружающих нас земных явлений» (Вернадский, 1965, с. 169).

В чем состоит принцип П. Кюри? «Характеристическая симметрия некоторого явления есть максимальная симметрия, совместимая с существованием явления. Явление может существовать в среде, обладающей своей характеристической симметрией или симметрией одной из подгрупп ее характеристической симметрии. Иными словами, некоторые элементы симметрии могут существовать с некоторыми явлениями, но это не обязательно. Необходимо, чтобы некоторые элементы симметрии отсутствовали. Это и есть та диссимметрия, которая создаёт явление... Когда некоторые причины производят некоторые действия, элементы симметрии причин должны обнаруживаться в этих произведенных действиях. Когда некоторые действия проявляют некоторую диссимметрию, то эта диссимметрия должна обнаруживаться и в причинах, их порождающих» (Кюри, 1966, с. 101-102; Curie, 1908).

Разрабатывая принцип диссимметрии в пригодной для приложений форме, П. Кюри ввел представление о предельных (с хотя бы одной осью ∞ бесконечного порядка) группах симметрии. Считается, что найденные им 7 (с учетом энантиоморфных – 10) групп характеризуют все пространства земной реальности: ∞ (вращающийся конус), ∞/m (вращающийся цилиндр),

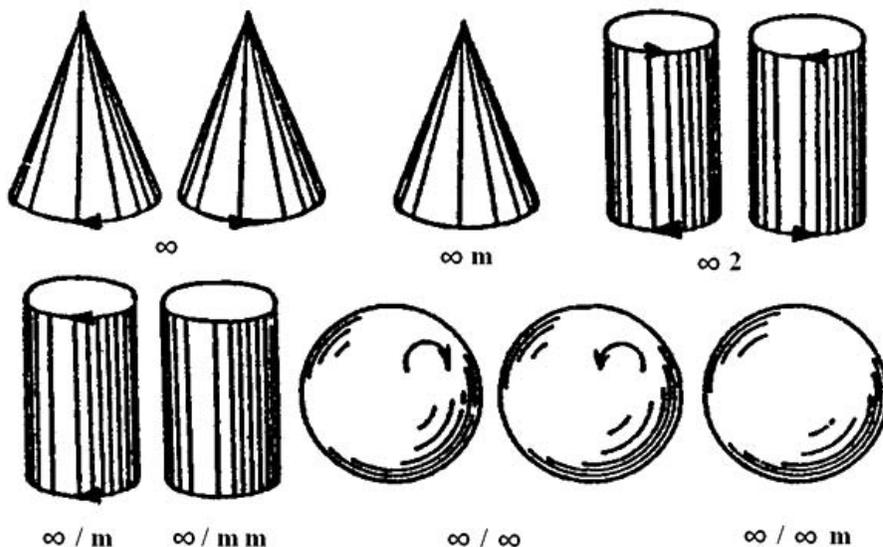


Рис. 4. Геометрическая интерпретация предельных групп симметрии П. Кюри.

∞m (покоящийся конус), $\infty 2$ (скрученный цилиндр), $\infty / m m$ (покоящийся цилиндр), ∞ / ∞ (вращающаяся сфера) и $\infty / \infty m$ (покоящаяся сфера) (рис. 4). Представляется, что эта формулировка требует уточнения.

Известно, сколь много внимания Вернадский уделил изучению живого вещества. Но в чем состоит его специфика как пространства земной реальности? «Изучать живой организм только как пространственное тело, не учитывая в нём одновременного проявления времени, натуралист не имеет возможности, к сожалению, сознательно он это не подчеркивает. В случае всякого живого вещества <...> натуралист имеет дело в действительности всегда <...> не с пространством, а с пространством-временем. <...> Это есть единственный случай, когда натуралист в окружающей его природе реально сталкивается с пространством-временем, а не с пространством только» (Вернадский, 1965, с. 192). Но если принять, что первейшее свойство живого вещества – его мгновенная изменчивость, несамостоятельность через как угодно малое время, то какой предельной группой симметрии П. Кюри его можно описать? Таковая отсутствует.

Система групп симметрии П. Кюри полна как система предельных (с хотя бы одной осью ∞) групп. Но она не полна как система групп симметрии, описывающих пространства земной реальности. Современное философское и естественнонаучное понимание живого вещества требует введения для его описания ещё одной группы симметрии, характеризующей его предельную диссимметрию (топологическую асимметрию), по

сути противоположную предельной симметрии $\infty/\infty m$ покоящейся сферы. Она определена не асимметрией внешней формы живого организма (для ее описания было бы достаточно примитивной кристаллографической группы), не правизной или левизной живого вещества в его физико-химическом рассмотрении наравне с минеральным веществом, а его неустранимым из рассмотрения внутренним движением, которое и есть – жизнь.

МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ *PANDORINA MORUM* (MÜLL.) BORY

Важный нюанс принципа диссимметрии П. Кюри иллюстрирует морфологическое разнообразие ценобиев *Pandorina morum* (Müll.) Bory. Как известно, в них 16 клеток, контактируя по 3, образуют однослойную сферу. В комбинаторном приближении каждый ценобий есть простой выпуклый 16-эдр. А примерное равенство клеток по размеру и оказываемому друг на друга давлению, отсутствие их специализации (в первую очередь двигательной), свободное вращение ценобия в толще воды в жизненном цикле – создают предпосылки того, что каждая клетка стремится иметь равное окружение, а организм в целом самую высокую симметрию.

Каталог (Войтеховский, Степенщиков, 2008б) даёт три менее или более подходящих морфотипа (рис. 5). По-видимому, принцип Кюри отвергает ценобий с ярко выраженной аксиальной симметрией -14m2. Из двух оставшихся предпочтительнее более симметричный ценобий -43m. Для проверки этого был поставлен эксперимент по выращиванию и анализу морфотипов *Pandorina morum* (Müll.) Bory (Войтеховский, 2001; Войтеховский и др., 2006). Оказалось, что оба варианта действительно встречаются, причем в пропорции 3:1. (Точнее, 73:24. В нашем случае она не имеет, скорее всего, генетической подоплёки. Компьютерный эксперимент методом Монте-Карло по сборке ценобиев из сферических глобул дал примерно ту же пропорцию, что еще требует объяснения). Оба полиэдра относятся к типу

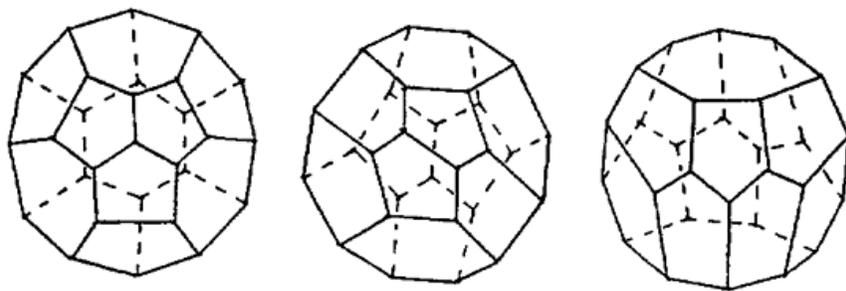


Рис. 5. Возможные морфотипы ценобиев *Pandorina morum* (Müll.) Bory (слева направо): -43m, 222, -14m2.

фуллеренов – составлены из 5- и 6-угольных граней. В силу известной теоремы, первых должно быть ровно 12, тогда вторых по необходимости – 4.

Преобладание ценобиев -43m прямо следует из принципа П. Кюри – в них реализована максимально возможная симметрия, допускаемая средой. Все 6- и 5-угольные грани имеют в них равное окружение. Но как оправдать существование ценобиев с симметрией 222? В первую очередь, обращает внимание наличие в них трех взаимно-перпендикулярных осей симметрии 2. С точки зрения кинематики, именно они (аналогично трем осям -4 в ценобиях -43m) «обеспечивают» свободное вращение организма в пространстве. Вероятно, реализация именно этого необходимого условия и допускает существование таких ценобиев. Заметим, что в них все 6-угольные грани имеют равное окружение, но среди 5-угольных есть 3 типа.

Таким образом, эксперимент с *Pandorina morum* (Müll.) Вору проиллюстрировал важный нюанс принципа диссимметрии П. Кюри. Он допускает и не самые симметричные формы объекта из вкладываемых в симметрию среды. Возможны реализации и других ее подгрупп симметрии при выполнении некоторых – всякий раз индивидуальных – необходимых условий, как то: наличие или отсутствие специализации частей организма и характер его движений – взятых во взаимосвязи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Укажем на ряд параллелей и различий в проявлениях симметрии в минералогических и биологических объектах. При этом заметим, что теория симметрии едина, но в обоих случаях при математическом описании мы прибегаем к меньшей или большей идеализации, делающей все аналогии и противопоставления рискованными.

Теоремы геометрии запрещают в кристаллах минералов точечные группы симметрии с осями 5-го порядка и порядков, больших шести. В организации живых организмов, по-видимому, не запрещены никакие симметрии. Кажется, этот принцип биологами никогда не обсуждался. Открытие металлических сплавов с осями симметрии 5-го порядка и расширение некоторых базовых определений сблизили миры живого и косного еще более.

В кристалле минерала симметрия внешней формы вкладывается в более высокую симметрию решётки. В организме, наоборот, асимметрия расположения внутренних органов вкладывается в симметрию внешней формы. Более строго, точечная группа симметрии (т.г.с., их 32) внешней грани кристалла определена его пространственной группой симметрии (п.г.с., их 230) в следующем смысле: т.г.с. есть фактор-группа п.г.с. по подгруппе трансляций. Внешняя симметрия организма и асимметрия расположения его внутренних органов заложены на генетическом уровне и транслируются во времени (от поколения к поколению). Возможна ли формулировка,

связывающая причину и следствия в биологии столь же строго? Или суть жизни отвергает здесь кристаллографический детерминизм?

В каждом кристаллографическом классе симметрии есть определенный набор простых форм, которые проявляются и комбинируются на кристалле в зависимости от его химического состава и условий роста, порождая множества родственных (по признаку симметрии) форм. Кажется важным понять, являются ли их биологическими аналогами выводимые из «прототипов» гомологические многообразия В.Н. Беклемишева (1944) и «полиморфические множества» С.В. Мейена (2007)?

Под влиянием среды кристаллы минералов и живые организмы могут диссимметризоваться согласно принципу П. Кюри, приобретая симметрию, характеризуемую одной из подгрупп, лежащих в пересечении максимальной точечной группы симметрии тела (минерала, организма) и предельной группы симметрии среды. По-видимому, на сегодняшнем уровне нашего понимания, в этом принципе, соединяющем морфологию и эволюцию, проявляется наибольшее сходство природных минеральных и живых тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Беклемишев В.Н.* 1944. Основы сравнительной анатомии беспозвоночных. М.: Советская наука. 492 с.
- Вернадский В.И.* 1965. Химическое строение биосферы Земли и её окружения. М.: Наука. 375 с.
- Войтеховский Ю.Л.* 2001. О морфологическом разнообразии колоний *Pandorina morum* (Müll.) Bory (Volvocaceae) // Журн. общ. биол. Т. 62. № 5. С. 425–429.
- Войтеховский Ю.Л., Степенищев Д.Г.* 2008а. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV: Выпуклые полиэдры. Т. I: 4- ... 12-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН. 833 с.
- Войтеховский Ю.Л., Степенищев Д.Г.* 2008б. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV: Выпуклые полиэдры. Т. II: Простые 13- ... 16-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН. 828 с.
- Войтеховский Ю.Л., Тимофеева М.Г., Степенищев Д.Г.* 2006. Принцип Кюри и морфологическое разнообразие колоний *Pandorina morum* (Müll.) Bory (Volvocaceae) // Журн. общ. биол. Т. 67. № 3. С. 206–211.
- Заренков Н.А.* 2009. Биосимметрия. М.: Либроком. 320 с.
- Кюри П.* 1966. О симметрии в физических явлениях: симметрия электрического и магнитного полей. Избранные труды. М.-Л.: Наука. С. 95–113.
- Мейен С.В.* 2007. Морфология растений в номотетическом аспекте. С.В. Мейен: палеоботаник, эволюционист, мыслитель. М.: ГЕОС. С. 162–222.
- Curie P.* 1908. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie d'un champ electrique et d'un champ magnetique. Oeuvres de P. Curie. Paris. P. 118–141.

**SYMMETRY, ASYMMETRY, DISSYMMETRY
AND ENANTIOMORPHISM OF POLYHEDRONS**

Yu.L. Voytekhovskiy

The article deals with the recent results on listing and description by the point symmetry groups of the combinatorial diversity of convex polyhedrons. It is the backdrop for the morphogenesis of polyhedral mineral and biological individuals in their ontogeny and phylogeny in variety expressions: symmetry, asymmetry, dissymmetry and enantiomorphism.